



# ऋणात्मक संख्याएँ और पूर्णांक

## (Negative Numbers and Integers)

### अध्याय के मुख्य बिंदु

◆ ऋणात्मक संख्याएँ ◆ पूर्णाकों का संख्या रेखा पर निरूपण ◆ पूर्णाकों का निरपेक्ष मान ◆ पूर्णाकों का योग ◆ पूर्णाकों का व्यवकलन (घटाना) ◆ पूर्णाकों का गुणन ◆ पूर्णाकों का विभाजन ◆ पूर्णाकों की घात ◆ कोष्ठक ◆ कोकाभागुयोघ नियम।

### ऋणात्मक संख्याएँ (Negative Numbers)

हम अपने दैनिक जीवन में बहुत-सी विपरीत स्थितियों को पाते हैं; जैसे- लाभ-हानि, आय-व्यय, समुद्र तल से ऊपर-समुद्र तल से नीचे, तापमान  $0^{\circ}\text{C}$  से ऊपर  $0^{\circ}\text{C}$  से नीचे आदि।

उदाहरण के लिए, समुद्र तल को प्रायः शून्य ऊँचाई माना जाता है। यदि एक चिड़िया शून्य ऊँचाई से 50 मीटर ऊपर उड़ती है, तो समुद्र तल से ऊपर उसके उड़ने की ऊँचाई को दर्शाने के लिए 50 मी का प्रयोग किया जाता है। यदि एक पनडुब्बी 50 मी नीचे डुबकी लगाती है, तो समुद्र तल से इसकी गहराई दर्शाने के लिए, 50 मी का प्रयोग करते हैं।

इसी प्रकार शून्य से  $15^{\circ}\text{C}$  से ऊपर के तापमान को  $15^{\circ}\text{C}$  लिखते हैं और शून्य से  $15^{\circ}\text{C}$  नीचे के तापमान को  $-15^{\circ}\text{C}$  लिखते हैं।

उपर्युक्त उदाहरणों में 50 और 15 को धनात्मक संख्याएँ तथा  $-50$  और  $-15$  को ऋणात्मक संख्याएँ कहा जाता है। गणित में ‘-’ चिह्न वाली संख्याओं को ऋणात्मक संख्याएँ कहा जाता है। ‘-’ को ऋणात्मक पढ़ा जाता है।

अतः सभी प्राकृतिक अथवा पूर्ण संख्याएँ, जब ऋण के चिह्न ‘-’ (minus) के साथ व्यक्त की जाती हैं, तो उन्हें ऋणात्मक संख्याएँ कहते हैं।

इन संख्याओं को इनके सापेक्ष आने वाली प्राकृतिक संख्याओं का प्रतिलोम (inverse) भी कहते हैं। उदाहरणार्थ, संख्या 1 का प्रतिलोम  $-1$  तथा 5 का प्रतिलोम  $-5$  आदि।

ऋणात्मक संख्याएँ अपने सापेक्ष प्राकृतिक संख्याओं के साथ जुड़कर परिणाम सदैव शून्य देती हैं। उदाहरणार्थ  $-6 + 6 = 0$ ,  $-9 + 9 = 0$  आदि। शून्य के अतिरिक्त धनात्मक संख्याएँ तथा ऋणात्मक संख्याएँ भी गणना में प्रयुक्त होती हैं। इन सभी संख्याओं को समूहबद्ध किया जा सकता है-

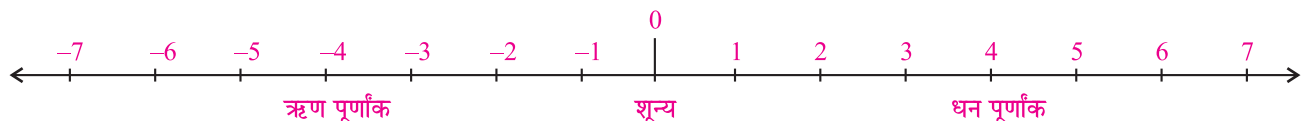
$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

इन संख्याओं को पूर्णांक (integers) कहा जाता है।

अतः प्राकृतिक संख्याएँ 1, 2, 3, 4, ..... आदि धनात्मक हैं और इन्हें धन पूर्णांक कहते हैं। संख्याएँ  $-1, -2, -3, -4, \dots$  आदि ऋणात्मक हैं और इन्हें ऋण पूर्णांक कहते हैं। शून्य न तो धनात्मक होता है और न ही ऋणात्मक। यह पूर्ण संख्या है और इसे पूर्णांक कहते हैं।

### पूर्णाकों का संख्या रेखा पर निरूपण (Representation of Integers on Number Line)

संख्या रेखा पर पूर्णाकों का निरूपण कर हम आसानी से शून्य, धन पूर्णांक और ऋण पूर्णांक को समझ सकते हैं। इसके लिए संख्या रेखा पर शून्य अंकित कर उसके दाईं ओर धन पूर्णांक तथा बाईं ओर ऋण पूर्णांक दर्शाते हैं-



संख्या रेखा पर जैसे-जैसे शून्य से दाईं ओर बढ़ेंगे हमें अगला बड़ा पूर्णांक मिलेगा। इसी प्रकार शून्य से बाईं ओर बढ़ने पर क्रमशः छोटी संख्याएँ मिलती जाएँगी।

अर्थात्  $-1 > -2$  ( $-1, -2$  से बड़ी संख्या है)

इसी प्रकार  $-3 > -4, -8 > -9$  आदि।





## पूर्णाकों का निरपेक्ष मान (Absolute Value of Integers)

किसी पूर्णांक का निरपेक्ष मान संख्या रेखा पर शून्य से अपनी दूरी दर्शाता है। यह दूरी धनात्मक अथवा ऋणात्मक हो सकती है, किंतु निरपेक्ष मान के रूप में धन अथवा ऋण की गणना नहीं करते हैं, निरपेक्ष मान सदैव धनात्मक होता है। निरपेक्ष मान दो ऊर्ध्वाधर रेखाओं के द्वारा दर्शाया जाता है।

जैसे-  $|-5| = 5$  अर्थात्  $-5$  का निरपेक्ष मान 5 है।



**याद रखिए!**

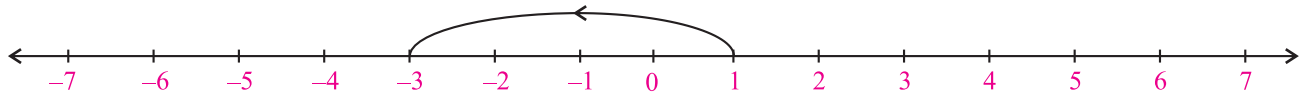
1. शून्य प्रत्येक धन पूर्णांक से छोटा होता है।
2. शून्य प्रत्येक ऋण पूर्णांक से बड़ा होता है।
3. प्रत्येक धन पूर्णांक प्रत्येक ऋण पूर्णांक से बड़ा होता है।
4. ऋण पूर्णाकों में  $-1$  सबसे बड़ा होता है।
5. जितनी बड़ी धनात्मक संख्या होगी, उतनी ही छोटी उसकी ऋणात्मक संख्या होगी।
6. शून्य से दाईं ओर जितनी दूर संख्या होगी, उसका मान उतना ही बड़ा होगा।
7. शून्य से बाईं ओर जितनी दूर संख्या होगी, उसका मान उतना ही छोटा होगा।

**उदाहरण :** संख्या रेखा पर पूर्णांक दर्शाइए, जो-

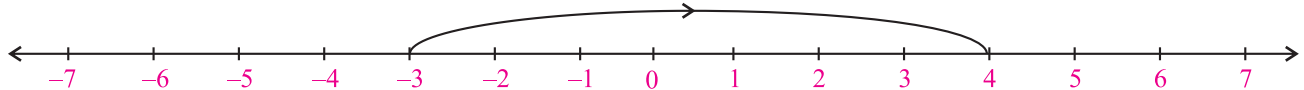
(क) 1 से 4 कम

(ख)  $-3$  से 7 अधिक

**हल :** (क) संख्या रेखा पर 1 से शुरू करके बाईं ओर 4 कदम चलते हैं और  $-3$  पर पहुँचते हैं।



(ख) संख्या रेखा पर  $-3$  से शुरू करके दाईं ओर 7 कदम चलते हैं और 4 पर पहुँचते हैं।



**उदाहरण :** निम्नलिखित का मूल्यांकन कीजिए-

(क)  $|-8|$

(ख)  $-|6|$

(ग)  $|10| + |-10|$

(घ)  $|-7| + |-8|$

**हल :** (क)  $|-8| = 8$

(ख)  $-|6| = -(6) = -6$

(ग)  $|10| + |-10| = 10 + 10 = 20$

(घ)  $|-7| + |-8| = 7 + 8 = 15$



### प्रश्नावली-3.1

1. निम्नलिखित को प्रदर्शित करने के लिए  $+$  अथवा  $-$  का प्रयोग कीजिए-

(क)  $0^\circ\text{C}$  से  $8^\circ\text{C}$  नीचे

(ख)  $0^\circ\text{C}$  से  $45^\circ\text{C}$  ऊपर

(ग) समुद्र तल से 500 मी ऊपर

(घ) समुद्र तल से 100 मी नीचे

(ङ) ₹ 100 का लाभ

(च) ₹ 200 की हानि

2. निम्नलिखित पूर्णाकों को ( $\uparrow$ ) द्वारा संख्या रेखा पर अंकित कीजिए-

(क) 0

(ख)  $-5$

(ग) 7

(घ)  $-8$

(ङ) 9





3. बॉक्स में > या < भरिए-

(क)  $-7$    $-14$

(ख)  $0$    $-5$

(ग)  $-8$    $1$

(घ)  $6$    $0$

(ङ)  $-6$    $-25$

(च)  $7$    $4$

4. निम्नलिखित पूर्णांक युग्मों में से दाईं ओर आने वाली संख्या लिखिए-

(क)  $-3, -6$

(ख)  $0, -5$

(ग)  $-4, 8$

(घ)  $2, 9$

5. निम्नलिखित संख्याओं के मध्य आने वाले सभी पूर्णांक लिखिए-

(क) 0 और 5

(ख)  $-1$  और 4

(ग)  $-5$  और 0

(घ)  $-6$  और  $-1$

6. निम्नलिखित पूर्णाकों को आरोही क्रम में लिखिए-

(क)  $-1, -7, 6, -3, 12$

(ख)  $6, 9, -8, 0, -2$

7. निम्नलिखित पूर्णाकों को अवरोही क्रम में लिखिए-

(क)  $-6, 2, -12, 0, 5$

(ख)  $15, -8, -3, -5, 10$

8. संख्या रेखा पर पूर्णांक दर्शाइए, जो-

(क)  $-2$  से 3 कम

(ख)  $-1$  से 7 अधिक

(ग) 0 से 6 कम

(घ) 2 से 5 अधिक

9. निम्नलिखित पूर्णाकों का निरपेक्ष मान लिखिए-

(क)  $|17|$

(ख)  $|-23|$

(ग)  $|-153|$

(घ)  $|243|$

10. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए-

(क)  $|-8| - |-6| + |15|$

(ख)  $|24| + |-6| + |-13|$

(ग)  $|20| - |-25| + |5|$

(घ)  $|16| + |-8| - |-8|$

11. निम्नलिखित पूर्णाकों के ठीक विपरीत पूर्णांक लिखिए-

(क)  $-8$

(ख)  $-25$

(ग)  $+7$

(घ)  $+143$

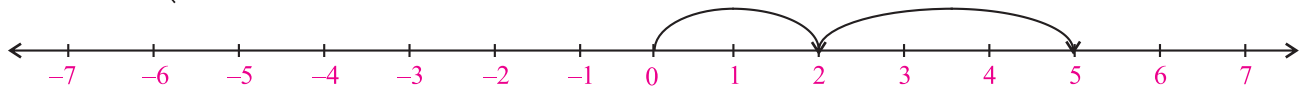
(ङ)  $-70$

## पूर्णाकों का योग (Addition of Integers)

1. धनात्मक संख्याओं का योग- धनात्मक संख्याओं का आंकिक मान जोड़ते हैं तथा उसके परिणाम को धन चिह्न (+) के साथ व्यक्त करते हैं अर्थात् धनात्मक संख्याओं का योग सदैव धनात्मक होता है।

जैसे-  $(+2) + (+3) = +5$

इसको संख्या रेखा पर इस प्रकार व्यक्त करेंगे-

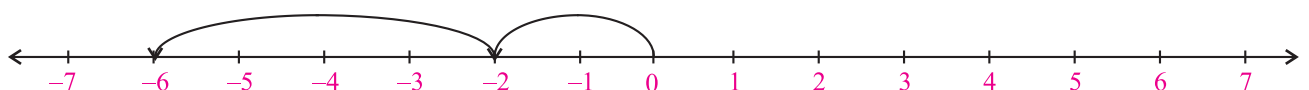


इसके लिए सर्वप्रथम शून्य से दाईं ओर 2 कदम चलते हैं, फिर 2 से दाईं ओर 3 कदम चलते हैं। इस प्रकार 2 और 3 का योग 5 प्राप्त होता है।

2. ऋणात्मक संख्याओं का योग- ऋणात्मक संख्याओं का आंकिक मान जोड़कर परिणाम ऋण चिह्न (-) के साथ व्यक्त करते हैं अर्थात् ऋणात्मक संख्याओं का योग सदैव ऋणात्मक होता है।

जैसे-  $(-2) + (-4) = -6$

इसको संख्या रेखा पर इस प्रकार व्यक्त करेंगे-





इसके लिए सर्वप्रथम शून्य से बाईं ओर 2 कदम चलते हैं। इसके बाद 2 से बाईं ओर 4 कदम चलते हैं। इस प्रकार -2 और -4 का योग -6 प्राप्त होता है।

- 3. धनात्मक तथा ऋणात्मक संख्याओं का योग-** धनात्मक और ऋणात्मक संख्याओं का योग सदैव उनका अंतर होता है। बड़ी संख्या में से छोटी संख्या को घटाकर परिणामी आंकिक मान प्राप्त करते हैं। परिणाम का चिह्न वही होता है, जो बड़ी संख्या का होता है।

किन्हीं अशून्य संख्याओं के लिए;  $a > 0$ ,  $b > 0$

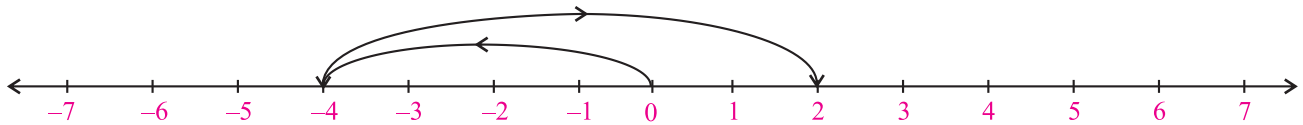
$$+a + (-b) = +(a-b) \text{ यदि } a > b$$

$$+a + (-b) = -(b-a) \text{ यदि } b > a$$

$$(-a) + (+b) = -(a-b) \text{ यदि } a > b$$

$$(-a) + (+b) = +(b-a) \text{ यदि } b > a$$

जैसे- -4 और 6 को जोड़ने पर परिणाम 2 प्राप्त होता है। इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाएँ-



इसके लिए सर्वप्रथम शून्य से बाईं ओर 4 कदम चलते हैं। इसके बाद -4 से दाईं ओर 6 कदम चलते हैं। परिणाम शून्य से दाईं ओर 2 स्थान पर मिलता है।

### पूर्णाकों के योग की विशेषताएँ-

1. दो पूर्णाकों का योग भी एक पूर्णाक ही होता है।
2. पूर्णाकों का योग क्रम विनिमेय होता है, अर्थात्  $a + b = b + a$
3. यदि  $a, b$  व  $c$  पूर्णाक हो, तो-  $a + (b + c) = (a + b) + c$
4. शून्य पूर्णाक को किसी भी पूर्णाक से जोड़ने पर परिणाम वही पूर्णाक प्राप्त होता है।  $a + 0 = 0 + a = a$
5. यदि  $a, b$  व  $c$  पूर्णाक हैं और यदि  $a > b$  हो, तो-  $a + b > b + c$   
और यदि  $a < b$  हो, तो-  $a + c < b + c$
6. एक पूर्णाक और इसके विपरीत पूर्णाक का योग शून्य होता है। यदि  $a$  एक पूर्णाक है, तो  $a + (-a) = 0$



### प्रश्नावली- 3.2

1. निम्नलिखित को संख्या रेखा पर दर्शाइए-

(क)  $-8 + 6$

(ख)  $9 + (-5)$

(ग)  $-7 + (-4)$

(घ)  $-2 + (-3) + 5$

(ङ)  $7 + 2 + (-8)$

(च)  $(-5) + (-3) + (-2)$

2. निम्नलिखित पूर्णाकों का योग ज्ञात कीजिए-

(क)  $-143, 117$

(ख)  $425, -405$

(ग)  $-303, -101$

(घ)  $-2137, 0$

(ङ)  $0, 830$

(च)  $512, 618$

3. सरल कीजिए-

(क)  $(-4) + 47 + (-16) + (-32)$

(ख)  $63 + (-7) + (-18)$

(ग)  $-289 + 400 + (-145)$

(घ)  $100 + (-34) + (-66)$

4. पूर्णाकों के योग संबंधी गुणधर्म का प्रयोग करके रिक्त स्थान भरिए-

(क)  $(-18) + 7 = 7 + \underline{\hspace{2cm}}$

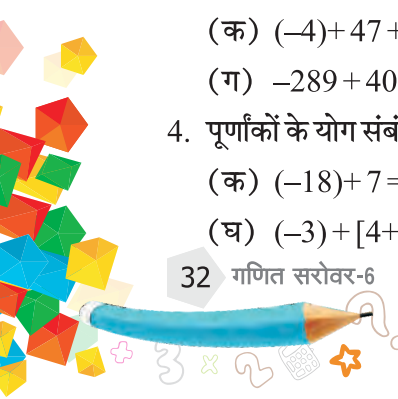
(ख)  $(-25) + 0 = \underline{\hspace{2cm}}$

(ग)  $(-55) + \underline{\hspace{2cm}} = -55$

(घ)  $(-3) + [4 + (-5)] = (-3 + 4) + \underline{\hspace{2cm}}$

(ङ)  $24 + (-24) = \underline{\hspace{2cm}}$

(च)  $58 + \underline{\hspace{2cm}} = 0$



## पूर्णाकों का व्यवकलन (घटाना) (Subtraction of Integers)

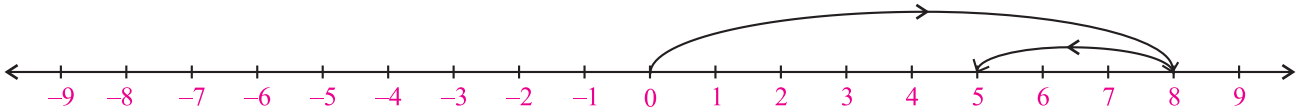
घटाने की प्रक्रिया योग के विपरीत होती है। इसे ऋण चिह्न (-) से व्यक्त करते हैं। यह किसी पूर्णाक को ऋण चिह्न देकर किसी अन्य पूर्णाक में जोड़ने की प्रक्रिया भी होती है। पूर्णाकों को घटाने की संक्रिया के लिए घटाए जाने वाले पूर्णाक का चिह्न परिवर्तित कीजिए और पूर्णाकों के योग के नियमों के अनुसार जोड़िए।

अर्थात्  $a - b = a + (-b)$

$$7 - 4 = 7 + (-4) = 3$$

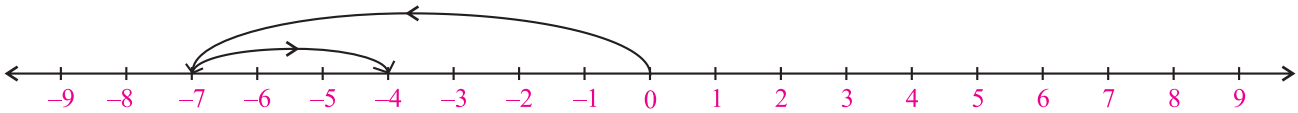
संख्या रेखा द्वारा घटाने की प्रक्रिया इस प्रकार है-

$$8 + (-3) = 5$$



इसी प्रकार,

$$(-7) - (-3) = (-7) + (+3) = -4$$



### पूर्णाकों के घटाने की विशेषताएँ-

1. यदि  $a$  और  $b$  पूर्णाक हैं, तो उनका अंतर  $a - b$  भी एक पूर्णाक होगा।

जैसे-  $8 - 2 = -6$

$-3 - 6 = -9$

यहाँ 6 और -9 पूर्णाक हैं।

2. यदि  $a$  एक पूर्णाक है, तो  $a - 0 = a$

जैसे-  $7 - 0 = 7$

$-4 - 0 = -4$

3. यदि  $a, b$  और  $c$  पूर्णाक हैं और  $a > b$  तब  $a - c > b - c$

जैसे-  $a = 9, b = 4$  और  $c = 2$

$a - c = 9 - 2 = 7$

$b - c = 4 - 2 = 2$

अतः  $7 > 2$

**एक पूर्णाक का पूर्ववर्ती-** एक पूर्णाक का पूर्ववर्ती ज्ञात करने के लिए उसमें से 1 घटाते हैं।

**उदाहरणार्थ-** 4 का पूर्ववर्ती =  $4 - 1 = 3$

0 का पूर्ववर्ती =  $0 - 1 = -1$

$-3$  का पूर्ववर्ती =  $-3 - 1 = -4$

### एक छोटी धनात्मक संख्या में से एक बड़ी धनात्मक संख्या घटाना-

एक छोटी धनात्मक संख्या में से बड़ी धनात्मक संख्या घटाने के लिए, बड़ी संख्या में से छोटी संख्या को घटाते हैं और अंतर से पहले ऋण चिह्न लगा देते हैं।

**उदाहरणार्थ-**  $120 - 150 = -(150 - 120) = -30$



**उदाहरण :** निम्नलिखित श्रृंखला का योग बताइए-

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$$

(क) यदि पदों की संख्या 119 हो।

(ख) यदि पदों की संख्या 220 हो।

**हल :**  $1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$

$$\text{यहाँ पहला पद} = 1$$

$$\text{दो पदों का परिणाम} = [1 + (-1)] = 0$$

$$\text{तीन पदों का परिणाम} = [1 + (-1) + 1] = 1$$

$$\text{चार पदों का परिणाम} = [1 + (-1) + 1 + (-1)] = 0$$

अतः स्पष्ट है कि यदि पदों की संख्या सम है, तो श्रृंखला का परिणाम शून्य होता है। यदि पदों की संख्या विषम है, तो श्रृंखला का परिणाम 1 है।

(क) पदों की संख्या 119 है, तो योग = 1

(ख) यदि पदों की संख्या 220 है, तो योग = 0

**याद रखिए!**

$+(+a) = +a$

$+(-a) = -a$

$-(+a) = -a$

$-(-a) = +a$



### प्रश्नावली- 3.3

1. पहले पूर्णांक में से दूसरे पूर्णांक को घटाइए-

(क) 2, 6

(ख) 12, 5

(ग) -11, 8

(घ) 3, -9

(ङ) 0, -125

(च) -112, -218

(छ) -325, 0

(ज) 88, 0

2. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए-

(क)  $(3-4) + (3-4)$

(ख)  $-25 - (-12)$

(ग)  $-11 + 30 - 16 - 2$

(घ)  $50 - (-45) - (-2)$

(ङ)  $16 - [(-2) + 12]$

(च)  $-8 - 7 - (-25)$

3. 8 में से -6 घटाइए। -6 में से 8 घटाइए। क्या दोनों के परिणाम समान हैं?

4. -520 और 180 के योग को -50 में से घटाइए।

5. यदि दो पूर्णाकों का योग 50 है और एक पूर्णांक -25 है, तो दूसरा पूर्णांक क्या है?

6. 998 और -486 के योग को -290 और 732 के योग में से घटाइए।

7. रिक्त स्थान भरिए-

(क)  $-4 + \underline{\hspace{2cm}} = -12$

(ख)  $17 + \underline{\hspace{2cm}} = 0$

(ग)  $\underline{\hspace{2cm}} - 215 = -64$

8. नीचे दी गई संख्या का योग ज्ञात कीजिए-

$$2 + (-2) + 2 + (-2) + 2 + (-2) + \dots$$

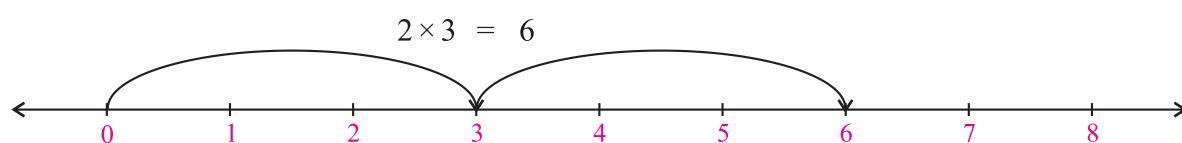
(क) यदि पदों की संख्या 238 हो

(ख) यदि पदों की संख्या 149 हो

### पूर्णाकों का गुणन (Multiplication of Integers)

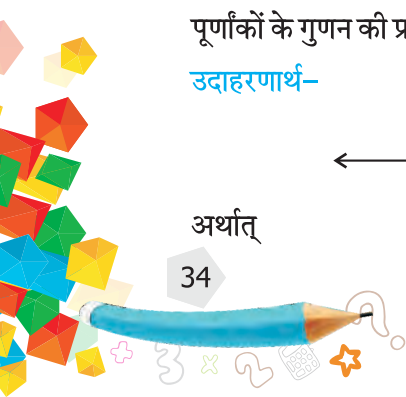
पूर्णाकों के गुणन की प्रक्रिया को संख्या रेखा की सहायता से समझा जा सकता है-

उदाहरणार्थ-



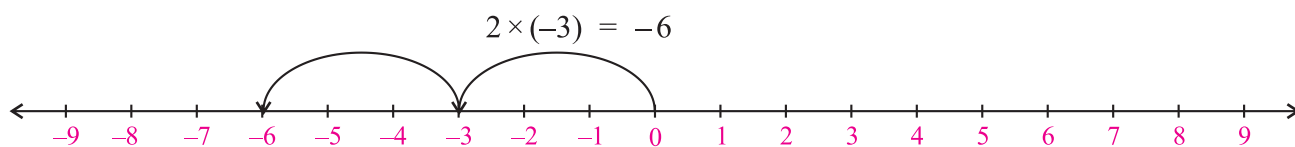
अर्थात्

$$2 \times 3 = 3 + 3 = 6$$





इसी प्रकार एक धन पूर्णांक को ऋण पूर्णांक से गुणा करने पर-



अर्थात्

$$2 \times (-3) = (-3) + (-3) = -6$$

दो ऋण पूर्णांकों का गुणन-

$$\begin{aligned} -2 \times (-3) &= (-1)(2) \times (-1) \times (3) = (-1) \times (-1) \times 2 \times 3 \\ &= -(-1) \times 6 = 6 \end{aligned}$$

### गुणन की प्रक्रिया के नियम-

1. दो विपरीत चिह्नों वाले पूर्णांकों के गुणन का परिणाम ऋणात्मक होगा।

उदाहरणार्थ-  $-4 \times 2 = -|4| \times |2| = -8$

2. दो समान चिह्नों वाले पूर्णांकों के गुणन का परिणाम धनात्मक होगा।

उदाहरणार्थ-  $4 \times 2 = |4| \times |2| = 8$

$-4 \times -2 = |4| \times |2| = 8$

**याद रखिए!**

(+)	×	(+)	=	(+)
(-)	×	(-)	=	(+)
(+)	×	(-)	=	(-)
(-)	×	(+)	=	(-)

### पूर्णांकों के गुणन की विशेषताएँ-

1. यदि  $a$  और  $b$  पूर्णांक हैं, तो उनका गुणनफल  $a \times b$  भी पूर्णांक होगा।

उदाहरणार्थ-  $3 \times 2 = 6$

$(-2) \times 4 = -8$

$(-5) \times (-6) = 30$

सभी पूर्णांक हैं।

2. यदि  $a$  और  $b$  पूर्णांक हैं, तो उनका गुणन क्रम विनिमेय होगा।

अर्थात्  $a \times b = b \times a$

उदाहरणार्थ-  $2 \times (-3) = (-3) \times 2 = -6$

3. यदि  $a, b$  और  $c$  पूर्णांक हैं, तो  $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

उदाहरणार्थ-  $-2 \times (3 \times 5) = -2 \times 15 = -30$

$(-2 \times 3) \times 5 = -6 \times 5 = -30$

4. यदि  $a$  एक पूर्णांक है, तो 1 से गुणा करने पर गुणनफल  $a$  होगा।

अर्थात्  $a \times 1 = 1 \times a = a$

उदाहरणार्थ-  $-6 \times 1 = 1 \times -6 = -6$

$8 \times 1 = 1 \times 8 = 8$

5. किसी पूर्णांक की शून्य से गुणा करने पर गुणनफल शून्य होता है।

$a \times 0 = 0 \times a = 0$

जहाँ  $a$  एक पूर्णांक है।

उदाहरणार्थ-  $0 \times 7 = 7 \times 0 = 0$

$(-2) \times 0 = 0 \times (-2) = 0$

(वितरण नियम)

6. यदि  $a, b$  और  $c$  पूर्णांक हैं, तो-

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$

(वितरण नियम)



उदाहरणार्थ-

$$3 \times (2+5) = 3 \times 7 = 21$$

$$3 \times (2+5) = 3 \times 2 + 3 \times 5 = 6 + 15 = 21$$

$$2 \times (4-8) = 2 \times -4 = -8$$

$$2 \times (4-8) = 2 \times 4 - 2 \times 8 = 8 - 16 = -8$$

7. यदि  $a, b$  और  $c$  पूर्णांक हैं और  $a > b$  तो-

$a \times c > b \times c$  जबकि  $c$  धन पूर्णांक है।

$a \times c < b \times c$  जबकि  $c$  ऋण पूर्णांक है।

उदाहरणार्थ-

माना

$$a = 12, b = 8 \text{ तथा } c = 2 (a > b)$$

$$12 \times 2 > 8 \times 2$$

$$24 > 16$$

अतः

$$a \times c > b \times c$$

माना

$$a = 12, b = 8 \text{ तथा } c = -2 (a > b)$$

$$12 \times -2 < 8 \times -2$$

$$-24 < -16$$

अतः

$$a \times c < b \times c$$



### प्रश्नावली- 3.4

1. गुणनफल ज्ञात कीजिए-

(क)  $(-2) \times 15$

(ख)  $8 \times (-125)$

(ग)  $(-18) \times (-30)$

(घ)  $(-5) \times 36 \times (-2)$

(ङ)  $(-9) \times (-9) \times (-9)$

(च)  $(-7) \times (-143) \times 0$

2. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए-

(क)  $(-175) \times (-56) + (-175) \times (-44)$

(ख)  $(-70) \times (10 - 5 - 43 + 98)$

(ग)  $10625 \times (-2) + (-10625) \times 98$

3. यदि  $a \times (-1) = -20$ , तो पूर्णांक  $a$  धनात्मक है या ऋणात्मक ?

4. यदि  $a \times (-1) = 20$ , तो पूर्णांक  $a$  धनात्मक है या ऋणात्मक ?

5. निम्नलिखित पूर्णाकों में कौन-सा परिणाम बड़ा है?

(क)  $[(-2) - (5)] \times (-6)$  और  $(-2) - 5 \times (-6)$

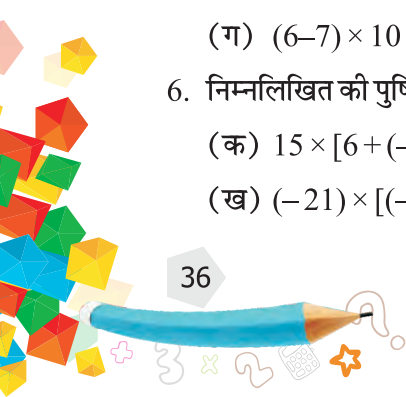
(ख)  $(8+9) \times 10$  और  $8+9 \times 10$

(ग)  $(6-7) \times 10$  और  $6-7 \times 10$

6. निम्नलिखित की पुष्टि कीजिए-

(क)  $15 \times [6 + (-2)] = 15 \times 6 + 15 \times (-2)$

(ख)  $(-21) \times [(-4) + (+14)] = (-21) \times (-4) + (-21) \times (+14)$





## पूर्णाकों का विभाजन (Division of Integers)

पूर्णाकों के विभाजन में धन अथवा ऋण चिह्न के आधार पर दो नियम हैं-

1. यदि भाज्य और भाजक दोनों संख्याओं के चिह्न समान हों, तो भागफल सदैव धनात्मक होगा।

उदाहरणार्थ-  $8 \div 2 = 4$  और  $-8 \div (-2) = 4$

2. यदि भाज्य और भाजक दोनों संख्याओं के चिह्न समान न हों, तो भागफल सदैव ऋणात्मक होगा।

उदाहरणार्थ-  $-8 \div 2 = -4$  और  $8 \div (-2) = -4$

### पूर्णाकों के विभाजन की विशेषताएँ-

1. यदि  $a$  और  $b$  पूर्णाक हैं, तो  $a \div b$  अपूर्णाक भी हो सकता है।

उदाहरणार्थ-  $8 \div 3 = \frac{8}{3}$  यह पूर्णाक नहीं है।

2. यदि  $a$  एक अशून्य पूर्णाक है, तो उसी पूर्णाक से उसके विभाजन का परिणाम सदैव 1 होगा अर्थात्,  $a \div a = 1$

उदाहरणार्थ-  $8 \div 8 = 1$

3. यदि  $a$  एक पूर्णाक है, तो 1 से भाग देने पर परिणाम सदैव वही पूर्णाक होगा अर्थात्  $a \div 1 = a$

उदाहरणार्थ-  $8 \div 1 = 8$

4. किसी भी अशून्य पूर्णाक को शून्य से विभाजित नहीं किया जा सकता है अर्थात्  $a \div 0$  अपरिभाषित है।

5. शून्य को किसी भी अशून्य पूर्णाक  $a$  से विभाजित करने पर परिणाम सदैव शून्य होगा अर्थात्  $0 \div a = 0$

उदाहरणार्थ-  $0 \div 3 = 0$

6. यदि  $a, b$  और  $c$  पूर्णाक हैं और  $a > b$  है, तो

$$a \div c > b \div c \quad \text{यदि } c \text{ धन पूर्णाक है।}$$

$$a \div c < b \div c \quad \text{यदि } c \text{ ऋण पूर्णाक है।}$$

### उदाहरणार्थ-

यदि  $a = 9, b = 6$  तथा  $c = 3$  तो

$$a \div c = 9 \div 3 = 3 \text{ एवं } b \div c = 6 \div 3 = 2$$

यहाँ  $a > b$  तथा  $c$  धन पूर्णाक है।

$$\text{अतः } a \div c > b \div c$$

यदि  $a = 9, b = 6$  तथा  $c = -3$  तो

$$a \div c = 9 \div (-3) = -3$$

$$b \div c = 6 \div (-3) = -2$$

$$-3 < -2$$

अतः  $a \div c < b \div c$

याद रखिए!

$$\begin{aligned} (-) \div (+) &= (-) \\ (+) \div (+) &= (+) \\ (+) \div (-) &= (-) \\ (-) \div (-) &= (+) \end{aligned}$$



## प्रश्नावली- 3.5

1. निम्नलिखित में प्रत्येक का भागफल ज्ञात कीजिए-

(क)  $32 \div (-8)$

(ख)  $(-45) \div (-15)$

(ग)  $(-21) \div 3$

(घ)  $0 \div (-13)$

(ङ)  $(-125) \div 0$

(च)  $(203) \div (-1)$

(छ)  $(-620) \div 1$

(ज)  $328 \div (-328)$

(झ)  $(-225) \div (-25)$

(ञ)  $(-435) \div 435$

(ट)  $28 \div (-7)$

(ठ)  $(-81) \div (-9)$





2. रिक्त स्थान भरिए-

(क)  $778 \div \underline{\quad} = 1$

(ख)  $-231 \div \underline{\quad} = 1$

(ग)  $927 \div 0 = \underline{\quad}$

(घ)  $0 \div 540 = \underline{\quad}$

(ङ)  $\underline{\quad} \div 21 = -3$

(च)  $\underline{\quad} \div 1 = -820$

3. निम्नलिखित कथनों के लिए बताइए कि ये सत्य हैं अथवा असत्य-

(क)  $0 \div (-8) = -0$

(ख)  $(-28) \div 0 = 0$

(ग)  $(-21) \div (-7) = -3$

(घ)  $(-32) \div (8) = -4$

(ङ)  $(-37) \div (-1) = 37$

(च)  $17 \div (-1) = -17$

### पूर्णाकों की घात (Powers of Integers)

कभी-कभी एक संख्या को उसी संख्या से कई बार गुणा करना होता है। इसको प्रकट करने के लिए एक सुविधाजनक विधि का प्रयोग करते हैं।

उदाहरणार्थ

$4 = 4^1$	(घात 1 नहीं लिखी जाती है।)
$4 \times 4 = 4^2$	(4 की घात 2 या 4 का वर्ग)
$4 \times 4 \times 4 = 4^3$	(4 की घात 3 या 4 का घन)
$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^4$	(4 की घात 4)

इन संख्याओं में 4 को आधार (base) और इस पर लगी घात को घातांक (exponent) कहते हैं।

1. यदि आधार ऋणात्मक पूर्णांक है और घातांक सम धनात्मक पूर्णांक है, तो मान धनात्मक पूर्णांक होगा।

उदाहरणार्थ  $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

2. यदि आधार ऋणात्मक पूर्णांक है और घातांक विषम धनात्मक पूर्णांक है, तो मान ऋणात्मक होगा।

उदाहरणार्थ  $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8$

3. समान संख्याओं की घातें, गुणा में जुड़ जाती हैं और भाग में घट जाती हैं।

उदाहरणार्थ  $(-4)^5 \times (-4)^2 = (-4)^{5+2} = (-4)^7$   
 $(7)^6 \div (7)^2 = (7)^{6-2} = (7)^4$

### कोष्ठक (Brackets)

दो या दो से अधिक मूलभूत संक्रियाओं वाले व्यंजकों को सरल करने के लिए समूहन (grouping) का प्रयोग किया जाता है। समूहन के लिए प्रयुक्त चिह्न कोष्ठक (Brackets) कहलाते हैं। प्रमुख रूप से प्रयोग किए जाने वाले कोष्ठक इस प्रकार हैं-

-	=	दंड कोष्ठक या रेखा कोष्ठक (Vinculum)
()	=	छोटा कोष्ठक (Round Brackets)
{ }	=	मँझला कोष्ठक (Braces)
[ ]	=	बड़ा कोष्ठक या वर्गी कोष्ठक (Square Brackets)

कोष्ठक का बायाँ भाग कोष्ठक के प्रारंभ को तथा दायीं भाग कोष्ठक के अंत को प्रकट करता है।

कोष्ठक की संक्रियाओं को निम्न क्रम में परिकलित किया जाता है-

1. क्रमानुसार रेखा कोष्ठक, छोटा कोष्ठक, मँझला कोष्ठक, बड़ा कोष्ठक हटाकर सरलीकरण किया जाता है। नियम यह है कि कोष्ठक चाहे जिस क्रम में लगे हों, सर्वप्रथम अंदर के कोष्ठक को क्रम से हटाकर सरलीकरण किया जाता है।
2. यदि कोष्ठक से पहले '+' चिह्न हो, तो कोष्ठक हटाने पर कोष्ठक के अंदर के चिह्न यथावत् बने रहते हैं।
3. यदि कोष्ठक से पहले '-' चिह्न हो, तो कोष्ठक हटाने पर कोष्ठक के अंदर का '+' चिह्न '-' और '-' चिह्न '+' हो जाता है।





- यदि कोष्ठक के पहले या बाद में कोई संख्या दी गई हो तथा उस संख्या और कोष्ठक के बीच कोई चिह्न न हो, तो वहाँ गुणा का चिह्न समझना चाहिए।
- प्रत्येक कोष्ठक को हटाने से पूर्व उसका सरलीकरण कर लेना चाहिए।
- सरलीकरण में सामान्यतः क्रम में पहले भाग, फिर गुणा, फिर जोड़ तथा फिर घटाने की क्रियाएँ करके सभी पदों को सरल करते हैं।

### कोकाभागयोघ नियम (BODMAS Rule)

कोकाभागयोघ (BODMAS) शब्द विभिन्न शब्दों के पहले अक्षरों से मिलकर बना है। ये अलग-अलग शब्द अलग-अलग गणितीय संक्रियाओं को दर्शाते हैं, जो कोकाभागयोघ या (BODMAS) के क्रम में हल की जाती हैं।

को (B)	=	कोष्ठक (Brackets)
का (O)	=	का (of)
भा (D)	=	भाग (Division)
गु (M)	=	गुणा (Multiplication)
यो (A)	=	योग (Addition)
घ (S)	=	घटाना (Subtraction)

अर्थात् प्रश्नों को हल करते समय सबसे पहले कोष्ठकों को हटाएँगे, फिर of अर्थात् 'का' को हल करेंगे। इसके बाद क्रम से भाग, गुणा, योग और अंत में घटाने की संक्रिया करेंगे।

**उदाहरण :**  $(15)^6$  में आधार तथा घातांक बताइए।

**हल :**  $(15)^6$  में आधार = 15, घातांक = 6

**उदाहरण :**  $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$  को घातांक पद्धति में व्यक्त कीजिए।

**हल :**  $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^5$

**उदाहरण :**  $4^3$  का मान ज्ञात कीजिए।

**हल :**  $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

**उदाहरण :**  $(-6)^8 \div (-6)^4$  को हल कीजिए।

**हल :** प्रथम विधि-  

$$(-6)^8 \div (-6)^4 = \frac{(-6) \times (-6) \times (-6) \times (-6) \times (-6) \times (-6) \times (-6) \times (-6)}{(-6) \times (-6) \times (-6) \times (-6)}$$

$$= (-6) \times (-6) \times (-6) \times (-6) = 1296$$

**उदाहरण :** सरल कीजिए :  $14 - [9 - \{16 - (18 - 6 + 3 - 12)\}]$

**हल :**  $14 - [9 - \{16 - (18 - 6 + 3 - 12)\}] = 14 - [9 - \{16 - (18 + 3)\}]$   
 $= 14 - [9 - \{16 - 21\}] = 14 - [9 - \{-5\}]$   
 $= 14 - [9 + 5] = 14 - 14 = 0$



### प्रश्नावली- 3.6

1. निम्नलिखित में प्रत्येक के आधार और घातांक लिखिए-

(क)  $(-5)^4$

(ख)  $6^7$

(ग)  $1^1$

(घ)  $(-38)^8$

(ङ)  $(-8)^1$



2. निम्नलिखित को घातांक पद्धति में व्यक्त कीजिए-

(क)  $12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12 \times 12$

(ख)  $(-15) \times (-15) \times (-15) \times (-15) \times (-15)$

3. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए-

(क)  $2^3 \times 2^6$

(ख)  $(-2)^8 \div (-2)^6$

(ग)  $(-5)^5 \div (-5)^3$

4. निम्नलिखित की पुष्टि कीजिए -

(क)  $(-2)^3 \times (-2)^2 = (-2)^5$

(ख)  $3^5 \div 3^2 = 3^3$

(ग)  $4^3 \div 2^5$

5. सरल कीजिए-

(क)  $20 + \{10 - 5 + (7 - 3)\}$

(ख)  $7 - \{13 - 2(4 \text{ का } -4)\}$

(ग)  $2 - [3 - \{6 - (5 - 4 - 3)\}]$

(घ)  $50 - 10 \times 2 \text{ का } 5 + (40 - 4) \div 9$

## सारांश



- पूर्णांक 1, 2, 3, 4, 5 ..... धनात्मक पूर्णांक हैं।
- पूर्णांक .... -5, -4, -3, -2 -1 ऋणात्मक पूर्णांक हैं।
- पूर्णांक 0 न तो धनात्मक है और न ही ऋणात्मक।
- एक पूर्णांक का बिना इसके चिह्न का ध्यान किए हुए आंकिक मान इसका निरपेक्ष मान कहलाता है।
- प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक प्रत्येक ऋणात्मक पूर्णांक से बड़ा होता है।
- समान चिह्न वाले पूर्णाकों का योग उनके आंकिक मान को जोड़कर उन्हीं के चिह्न के साथ लिखते हैं।
- दो असमान चिह्नों वाले पूर्णाकों का योग उनका अंतर होता है। परिणाम के साथ बड़ी संख्या का चिह्न प्रयुक्त करते हैं।
- किसी पूर्णांक को किसी संख्या से घटाने का तात्पर्य उस पूर्णांक को विपरीत चिह्न की संख्या के साथ जोड़ना है।
- दो पूर्णाकों का गुणनफल निकालते हैं, तो निम्नलिखित चिह्नों का प्रयोग करते हैं-  $(+) \times (+) = (+)$ ,  $(-) \times (-) = (+)$ ,  $(+) \times (-) = (-)$ ,  $(-) \times (+) = (-)$
- $a^n = a \times a \times a \times a \dots n$  बार
- कोकाभागयोघ (BODMAS) नियम के अनुसार ही कोष्ठक हल किए जाते हैं।

## बहुविकल्पीय प्रश्न (MCQs)

1. सबसे बड़ा ऋणात्मक पूर्णांक है-

(क) 0

(ख) -1

(ग) -0

(घ) इनमें से कोई नहीं

2. -2 की परवर्ती संख्या है-

(क) -3

(ख) -1

(ग) 0

(घ) 3

3.  $8 \div 0 = ?$

(क) 8

(ख) 1

(ग) 0

(घ) अर्थहीन

4.  $(-8) \times (-8) = ?$

(क) -64

(ख) 64

(ग) 16

(घ) -16

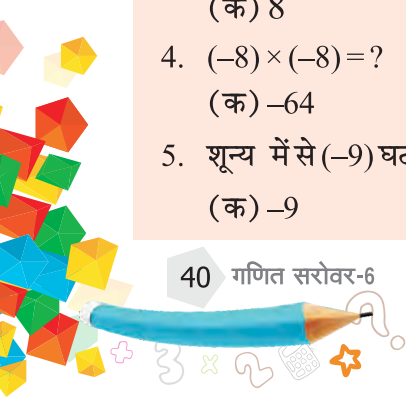
5. शून्य में से (-9) घटाने पर प्राप्त होगा-

(क) -9

(ख) 9

(ग) 0

(घ) 90





## बौद्धिक गणित (Mental Maths)

- 0 के ठीक विपरीत पूर्णांक क्या है?
- संख्या रेखा पर  $-5$  से  $5$  तक की दूरी क्या है?
- कौन-सा तापमान अधिक है :  $-3^{\circ}\text{C}$  या  $-5^{\circ}\text{C}$ ?
- निम्नलिखित को पूर्णाकों द्वारा प्रदर्शित कीजिए-  
(क) ₹ 500 का लाभ (ख) 800 मी० समुद्र तल से नीचे
- $(-9) \times 6 + (-9) \times 4$  का मान ज्ञात कीजिए।



## प्रयोगात्मक क्रियाकलाप LAB ACTIVITY

**उद्देश्य-** दो पूर्णाकों का योगफल ज्ञात करना।

**आवश्यक सामग्री-** विभिन्न रंगों के कंचे या बटन।

**प्रक्रिया-**

- $(-9)$  और  $(+5)$  को जोड़ना है।
- $(-9)$  को प्रदर्शित करने के लिए 9 लाल कंचे लेकर उन्हें एक पंक्ति में रखिए।
- $(+5)$  को प्रदर्शित करने के लिए 5 नीले कंचे लीजिए और उन्हें ऊपर के लाल कंचों के ठीक नीचे एक पंक्ति में रखिए।
- एक लाल और एक नीले कंचे का युग्म बनाइए। एक लाल कंचा  $(-1)$  तथा एक नीला कंचा  $(+1)$  को दर्शाता है। अतः दोनों को जोड़कर शून्य प्राप्त होता है  $(-1) + (+1) = 0$
- अब बिना युग्म के कंचों को गिनते हैं। वे 4 लाल कंचे हैं, जो  $(-4)$  को दर्शाता है।
- इस प्रकार,  $-9 + (+5) = -4$

